Cahier de vacances de mathématiques
de la 1ère vers la terminale

Equipe de mathématiques du
Lycée Général et Technologique Albert Londres

Été 2026

Pour que tu puisses aborder l'année scolaire prochaine avec sérénité, l'équipe de mathématiques du lycée a conçu pour toi ce cahier de vacances.
Essaye de faire les exercices sans utiliser aucune aide.
Si tu bloques trop longtemps sur une question ou si tu ne vois pas comment l'aborder, tu peux utiliser ton cours et les liens utiles donnés dans ce cahier.
Une fois un exercice terminé, et seulement à ce moment-là, regarde le corrigé et compare avec ce que tu as fait.
Bon travail et bonnes vacances.

Sommaire

1. Thème : suites numériques (Spécialité de Terminale et Maths Complémentaires)

Exercice 1 (mode de génération d'une suite).
Dans chaque cas, calculer les trois premiers termes de la suite donnée.

1. $u_n = 3n^2 - 2n + 11$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = 5u_n + n^2 - 10 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
4. $u_n = \dfrac{3}{2n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
5. $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = 4u_n + u_n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$
6. $u_n = \dfrac{n^2+3}{n-4}$ pour tout $n > 4$

Corrigé ✎

Exercice 2 (suites arithmétiques, suites géométriques).
Donner la nature de chaque suite (arithmétique, géométrique ou aucune des deux).
Pour les suites arithmétiques et géométriques, donner la raison, le premier terme et calculer u_{15}.

1. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 1{,}32 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
2. $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 0{,}99\, v_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
3. $w_n = -3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
4. $z_n = -3 + 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
5. $\begin{cases} t_1 = -3 \\ \dfrac{t_{n+1}}{t_n} = 0{,}1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$
6. $r_n = \dfrac{1}{5} + \dfrac{n}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Corrigé ✎

Exercice 3 (sens de variation).
Étudier le sens de variation de chaque suite.

1. (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -1 + 3n$.
2. (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = 2n^2 - 3n + 1$.
3. (w_n) définie par $w_0 = 3$ et $w_{n+1} = 0{,}2w_n$ pour tout entier naturel n.

Corrigé ✎

Exercice 4 (limites).
Donner, à l'aide de la calculatrice, la limite de chaque suite.

1. (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{1}{3}n^2 + 2n - 10$.
2. (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \pi$.
3. (w_n) définie par $w_0 = 5$ et $w_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n + 2$ pour tout entier naturel n.

Corrigé ✎

Exercice 5 (sommes)**.**
Calculer les sommes suivantes :

1. $S = 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 31$
2. $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 256$
3. La somme des 100 premiers termes de la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme égal à 12.
4. La somme des 2025 premiers termes de la suite arithmétique de raison $1,5$ et de premier terme égal à -123.

Corrigé ✎

Exercice 6 (problème 1)**.**
D'après l'ADEME (Agence De l'Environnement et de la Maîtrise de l'Énergie), chaque français a produit une masse moyenne de 365 kg de déchets ménagers en 2018.
Un maire, étant informé que la masse moyenne de déchets ménagers dans sa commune en 2018 était de 400 kg par habitant, décide d'une campagne annuelle de sensibilisation au recyclage qui conduit à une réduction de cette production de 1,5 % par an, et cela dès l'année 2019.
On modélise alors la masse moyenne de déchets ménagers par habitant calculée en fin d'année dans cette commune par une suite (d_n) où pour tout entier naturel n, d_n correspond à la masse moyenne de déchets ménagers par habitant, en kg, pour l'année 2018+n. Ainsi, $d_0 = 400$.

1. Calculer d_1 et interpréter le résultat.
2. (a) Déterminer la nature de la suite (d_n). Préciser sa raison et son premier terme.
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer d_n en fonction de n.
   (c) En déduire la masse moyenne de déchets ménagers par habitant en 2023.
3. Écrire une fonction Python qui retourne l'année à laquelle la masse moyenne de déchets ménagers par habitant de la commune devient inférieure à 365 kg.

Corrigé ✎

Exercice 7 (problème 2)**.**
Camille et Dominique ont été embauchés au même moment dans une entreprise et ont négocié leur contrat à des conditions différentes :

- Camille a commencé en 2010 avec un salaire annuel de 14 400 €, alors que le salaire de Dominique était, cette même année, de 13 200 €.
- Le salaire de Camille augmente de 600 € par an alors que celui de Dominique augmente de 4 % par an.

1. Quels étaient les salaires annuels de Camille et de Dominique en 2012 ?
2. On modélise les salaires de Camille et de Dominique à l'aide de suites
   (a) On note u_n le salaire de Camille en l'année 2010+n. On a donc $u_0 = 14\,400$. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   (b) Déterminer en quelle année le salaire de Camille dépassera 20 000 €.
   (c) On note v_n le salaire de Dominique en année 2010+n. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   (d) Déterminer à partir de quelle année le salaire de Dominique dépassera celui de Camille.

Corrigé ✎

2. Thème : fonction polynôme de degré 2 (Spécialité de Terminale et Maths Complémentaires)

Exercice 8 (forme canonique)**.**
Soit le polynôme $P(x) = 2x^2 - 8x + 3$.

1. Écrire $P(x)$ sous sa forme canonique.
2. Déterminer le sommet de la parabole associée.

Corrigé ✎

Exercice 9 (équations et inéquations)**.**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

- $x^2 - 5x + 6 = 0$
- $4x^2 - 12x + 9 = 0$
- $2x^2 + 3x + 5 = 0$
- $-3x^2 + 12x - 5 = 0$
- $x^2 - 7x + 10 < 0$
- $x^2 - 6x + 9 \geq 0$
- $x^2 - 4x \leq 0$
- $-x^2 + 4x - 3 < 0$

Corrigé ✎

Exercice 10 (application concrète)**.**
Un projectile suit une trajectoire donnée par $h(t) = -5t^2 + 20t + 15$, où $h(t)$ est la hauteur (en mètres) en fonction du temps t (en secondes).

1. Quelle est la hauteur du projectile à l'instant $t = 0$?
2. Déterminer l'instant où le projectile atteint sa hauteur maximale.
3. Calculer cette hauteur maximale.
4. A quel instant le projectile touche-t-il le sol ?

Corrigé ✎

Exercice 11 (propriétés des racines)**.**
Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré admettant deux racines distinctes.

1. Montrer que la somme de ses racines est égale à $-\frac{b}{a}$ et que leur produit est égal à $\frac{c}{a}$.
2. Appliquer ces formules à $x^2 - 5x + 6$ et en déduire ses deux racines.

Corrigé ✎

Exercice 12 (variations et graphique)**.**
Soit $P(x) = -x^2 + 6x - 5$.

1. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole.
2. Construire le tableau de variations de $P(x)$.
3. On admet que $P(13) = -96$, en déduire $P(-7)$.

Corrigé ✎

Exercice 13 (axe de symétrie)**.**
Soit $g(x) = x^2 + 2x - 3$.

1. Calculer $g(1)$ et $g(-3)$. Que peut-on en déduire ?
2. En déduire l'axe de symétrie de la parabole représentative de g.

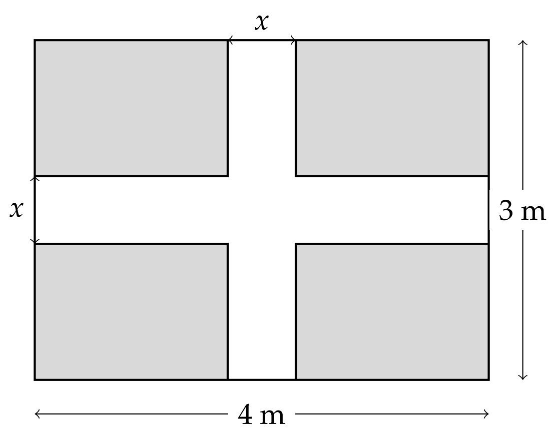
Corrigé ✎

Exercice 14 (Problème 1)**.**
Un agriculteur dispose de 600 m de clôture pour entourer un champ rectangulaire.

1. Montrer que l'aire $A(x)$ du champ s'exprime comme un polynôme du second degré.
2. Déterminer la ou les valeurs pour la ou lesquelles l'aire est maximale et calculer cette aire maximale.

Corrigé ✎

Exercice 15 (Problème 2)**.**
Quelle largeur doit-on donner à la croix pour que son aire soit égale à l'aire restante du drapeau ?



Corrigé ✎

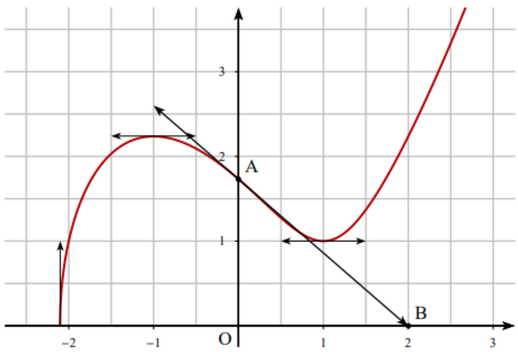
3. Thème : dérivation (Spécialité de Terminale et Maths Complémentaires)

Exercice 16 (graphique)**.**

Soit la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]-2,1\,;+\infty[$ et passant par les points de coordonnées $(-1\,;2,25)$ et $(1\,;1)$.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(0\,;1,73)$ passe par le point $B(2;0)$.

1. Donner les valeurs de $f(-1)$, $f(1)$, $f'(-1)$ et $f'(1)$.
2. Calculer $f'(0)$ puis donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.



Corrigé

Exercice 17 (calculs de dérivées)**.**

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions ci-dessous et étudier leurs variations.

- $f(x) = -\dfrac{4}{3}x + 2$
- $g(x) = -2x^2 - 4x + 6$
- $h(x) = \dfrac{3x+1}{x+2}$
- $i(x) = x\sqrt{x}$
- $j(x) = 5x^3 - 2x^2 - 5x + 1$
- $k(x) = (-5x+3)^3$
- $l(x) = \dfrac{2x^2-3}{x^2+7}$
- $m(x) = (x^2+1)(x^3-2x)$ (challenge !)

Indice : pour étudier le signe de $m'(x)$ on vérifiera que :
$2x(x^3-2x) + (x^2+1)(3x^2-2) = (x-1)(x+1)(5x^2+2)$.

Corrigé

Exercice 18 (tangentes)**.**

On considère les fonctions $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = \dfrac{3}{x+2}$.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de g au point $A(0\,;1,5)$.

Corrigé

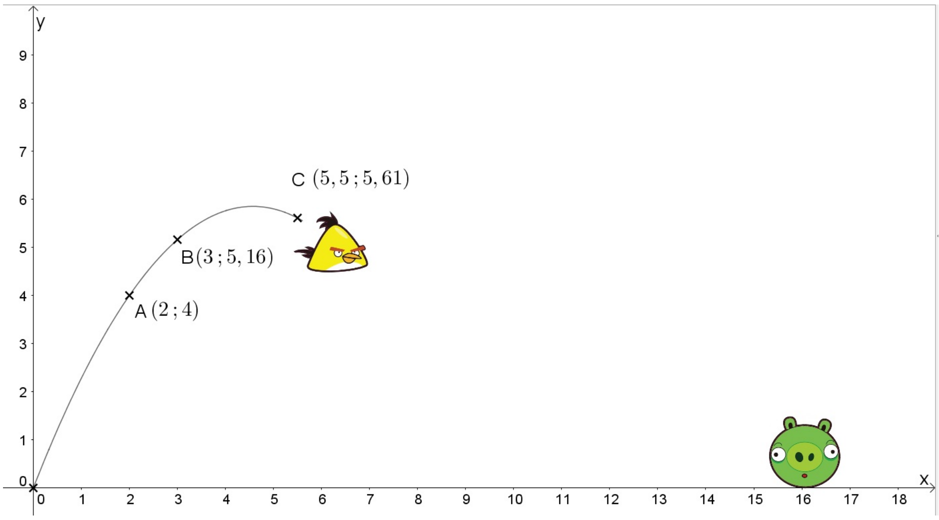
Exercice 19 (problème 1)**.**

Une entreprise fabrique des canapés. Elle peut en fabriquer jusqu'à 100 par mois.
Le coût de fabrication, en euros de x canapés est donné par : $C(x) = 0,04x^3 - 0,4x^2 + 380x + 6\,000$.
Chaque canapé est vendu 912 € et on note $R(x)$ la recette de la vente de x canapés.
Le bénéfice (positif ou négatif) réalisé par l'entreprise pour la fabrication et la vente de x canapés est noté par $B(x)$.

1. (a) Calculer le bénéfice réalisé pour la fabrication et la vente de 50 canapés.
   (b) Montrer que $B(x) = -0,04x^3 + 0,4x^2 + 532x - 6\,000$ pour $x \in [0\,;100]$.
2. (a) Déterminer la dérivée de la fonction définie sur $[0\,;100]$ par :
   $B(x) = -0,04x^3 + 0,4x^2 + 532x - 6\,000$.
   (b) En déduire, en justifiant, le tableau de variations de la fonction B sur $[0\,;100]$.
3. Donner le nombre de canapés que l'entreprise doit fabriquer et vendre pour réaliser un bénéfice maximal puis donner ce bénéfice.

Corrigé

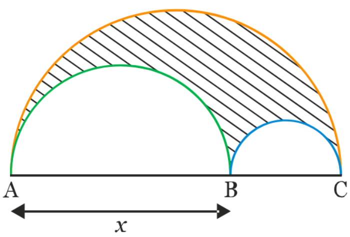
Exercice 20 (problème 2)**.**
Dans un jeu sur smartphone, le joueur utilise un lance-pierre pour lancer des oiseaux sur des cochons verts.
Chaque oiseau lancé suit une trajectoire parabolique et l'oiseau jaune a le pouvoir d'accélérer en ligne droite dès que le joueur tape sur l'écran.



1. La trajectoire parabolique de l'oiseau ci-dessus passe par l'origine du repère ainsi que par les points $A(2\,;4)$, $B(3\,;5,16)$ et $C(5,5\,;5,61)$.
   Le but de la question 1. est de déterminer les coefficients a, b et c de la fonction polynôme correspondante $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$.
   (a) A l'aide du point d'origine, déterminer c.
   (b) En utilisant les points A et B, écrire un système d'inconnues a et b et le résoudre.
   (c) En déduire que l'expression de f est $f(x) = -0,28x^2 + 2,56x$ pour tout x réel positif.
2. Le joueur tape sur l'écran lorsque l'oiseau jaune est au point C sur sa trajectoire.
   On admet que l'oiseau jaune suit alors une trajectoire rectiligne suivant la tangente à la courbe de f au point C.
   (a) Déterminer l'équation de cette trajectoire.
   (b) Déterminer le point d'impact de l'oiseau au niveau de l'axe des abscisses.
   (c) Sachant que le cochon se trouve au point d'abscisse 16 et qu'il occupe 0,7 unité de large sur cet axe, en déduire s'il sera touché ou non par l'oiseau.

Corrigé ✎

Exercice 21 (prise d'initiative)**.**
$[AC]$ est un segment de longueur 12 cm. B est un point du segment $[AC]$ tel que $AB = x$.
On construit d'un même côté de la droite (AB) les demi-cercles de diamètres $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.



Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire de la partie hachurée est maximale et cette aire.

Corrigé ✎

4. Thème : fonction exponentielle (Spécialité de Terminale et Maths Complémentaires)

Exercice 22 (propriétés algébriques).
Simplifier les écritures suivantes :

1. $\left(e^{-4x}\right)\left(e^{2x}\right)^3$
2. $\dfrac{e^{x-2}}{e^{-x+5}}$
3. $\dfrac{\left(e^{3x}\right)\left(e^{-2x}\right)^5}{e^{-x}}$
4. $\dfrac{e^{-x}+e^{x}}{e^{x}}$

Corrigé ✎

Exercice 23 (équations et inéquations).
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $e^{3-x}=1$
2. $e^{2x^2+3}=e^{7x}$
3. $2e^{-x}=\dfrac{1}{e^{x}+2}$
4. $\left(e^{x}\right)^3>e^{x+6}$
5. $e^{x}\leq\dfrac{1}{e^{x}}$
6. $e^{x^2-3}-e^{-2x}\leq 0$

Corrigé ✎

Exercice 24 (calculs de dérivées).
Calculer la dérivée des fonctions suivantes définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Simplifier si possible.

1. $f(x)=(x^2-2x)e^{x}$
2. $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{2e^{x}+1}$
3. $f(x)=e^{-2x+3}$
4. $f(x)=(2x-5)e^{\frac{1}{2}x+4}$

Corrigé ✎

Exercice 25 (une étude de fonction).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)e^{x}$.

1. Calculer la dérivée de la fonction f.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Déterminer une équation de la tangente en $x=0$.
4. Tracer sur la calculatrice la courbe représentative et sa tangente en 0.

Corrigé ✎

Exercice 26 (problème 1).
Une entreprise pharmaceutique fabrique un soin antipelliculaire. Elle peut produire entre 200 et 2 000 litres de produit par semaine. Le résultat, en dizaines de milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de litres est donné par la fonction R définie par : $R(x)=(5x-30)\,e^{-0{,}25x}$, $\quad x\in[2;20]$

1. Calculer le résultat réalisé par la fabrication et la vente de 7 centaines de litres de produit. On l'arrondira à l'euro près.
2. Vérifier que pour la fabrication et la vente de 400 litres de produit, l'entreprise réalise un résultat négatif (appelé déficit).
3. Résoudre l'inéquation $R(x)\geq 0$. Interpréter dans le contexte de l'exercice.
4. On note $R'(x)$ la dérivée de la fonction R. Déterminer $R'(x)$. En déduire la quantité de produit que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser le résultat maximal. Préciser ce résultat.

Corrigé ✎

Exercice 27 (problème 2)**.**
Une entreprise fabrique des pièces identiques en acier, pour l'industrie aéronautique. Ces pièces sont coulées dans des moules à la sortie du four. Elles sont stockées dans un entrepôt dont la température ambiante est maintenue à 25°C. Ces pièces peuvent être modelées dès que leur température devient inférieure ou égale à 600°C et on peut les travailler tant que leur température reste supérieure ou égale à 500°C. La température de ces pièces varie en fonction du temps. On admet que la température en degré Celsius de ces pièces peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(t) = 1375\mathrm{e}^{-0,075t} + 25,$$

où t correspond au temps, exprimé en heures, mesuré après la sortie du four.

1. Calculer la température des pièces à la sortie du four.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Ce résultat était-il prévisible dans le contexte de l'exercice ?
3. Les pièces peuvent-elles être modelées 10 heures après la sortie du four ? Après 14 heures ?
4. On souhaite déterminer le temps minimum d'attente en heures après la sortie du four avant de pouvoir modeler les pièces. Ecrire un programme Python qui donne ce résultat en sortie.

Corrigé ✎

5. Thème : probabilités conditionnelles (Spécialité de Terminale et Maths Complémentaires)

Exercice 28 (loi de probabilité)**.**
Un dé est déséquilibré de sorte que la probabilité d'obtenir chacune des faces est proportionnelle à son numéro. Donner la loi de probabilité définie sur l'ensemble des 6 faces.

Corrigé ✎

Exercice 29 (propriétés)**.**
A et B sont deux événements d'une même expérience aléatoire tels que :

1. $P(A) = 0,3$, $P(A \cup B) = 0,7$ et $P(A \cap B) = 0,2$. Calculer $P(\overline{B})$.
2. $P(\overline{A}) = 0,44$, $P(\overline{B}) = 0,63$ et $P(A \cup B) = 0,32$. Calculer $P(A \cap B)$.

Corrigé ✎

Exercice 30 (probabilités conditionnelles)**.**
Une agence de voyage propose deux formules week-end pour se rendre à Londres au départ de Nantes.
Les clients choisissent leur moyen de transport : train ou avion.
De plus, s'ils le souhaitent, ils peuvent compléter leur formule par l'option « visites guidées ».
Une étude a produit les données suivantes :

- 40 % des clients optent pour l'avion ;
- parmi les clients ayant choisi le train, 50 % choisissent aussi l'option « visites guidées » ;
- 12 % des clients ont choisi à la fois l'avion et l'option « visites guidées ».

On interroge au hasard un client de l'agence ayant souscrit à une formule week-end à Londres.
On considère les événements suivants :

- A : « le client a choisi l'avion » ;
- V : « le client a choisi l'option « visites guidées » ».

1. Construire un arbre pondéré pour illustrer cette situation.
2. Déterminer $P_A(V)$.
3. Démontrer que la probabilité pour que le client interrogé ait choisi l'option « visites guidées » est égale à 0,42.
4. Calculer la probabilité pour que le client interrogé ait pris l'avion sachant qu'il n'a pas choisi l'option « visites guidées ». Arrondir le résultat au centième.
5. On interroge au hasard deux clients de manière aléatoire et indépendante. Quelle est la probabilité qu'aucun des deux ne prennent l'option « visites guidées » ?

Corrigé ✎

Exercice 31 (loi de probabilité quelconque)**.**
Une loterie organisée par une association sportive est constituée d'un ensemble Ω de billets numérotés de 1 à 2 000. Un des billets rapporte un lot de 500 €, deux billets un lot de 150 € et cinq billets un lot de 100 €.
Le prix du billet est de 2 €.
On achète un billet au hasard.
X est la variable aléatoire, définie sur Ω, égale au gain algébrique procuré par le billet.

1. Déterminer les valeurs prises par X en tenant compte du prix du billet.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer l'espérance mathématique de X. Qu'en concluez vous ?
4. L'association décide de limiter le nombre de billets à un nombre n, avec n compris entre 1 et 2 000, pour que le jeu devienne équitable et tout en conservant le même nombre de billets gagnant. Déterminer n.

Corrigé ✎

Exercice 32 (problème 1)**.**
Un magasin commercialise des canapés et des tables basses.
Une étude a montré que :

- la probabilité pour qu'un client achète un canapé est 0,24 ;
- la probabilité qu'un client achète une table basse sachant qu'il a acheté un canapé est 0,25 ;
- la probabilité qu'un client achète une table basse sachant qu'il n'achète pas de canapé est 0,1.

On choisit un client au hasard parmi ceux ayant participé à l'étude. On note :

- C l'événement « le client achète un canapé » et $\overline{C}$ son événement contraire ;
- T l'événement « le client achète une table basse » et $\overline{T}$ son événement contraire.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que le client achète un canapé et une table basse.
3. Calculer $P(T)$ et interpréter le résultat.
4. Dans ce magasin, le prix moyen d'un canapé est de 1 000 € et le prix moyen d'une table basse est de 300 €. On note X la variable aléatoire correspondant à la somme payée par le client.
   (a) Déterminer le tableau de la loi de probabilité de X.

x_i				
$P(X = x_i)$				

   (b) Calculer $E(X)$ et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

Exercice 33 (problème 2)**.**
Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est $0,1$;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'événement « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'événement G_n.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4. Montrer que pour tout nombre entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.
5. On admet que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$.
   (a) Calculer p_5 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
   (b) Conjecturer la limite de la suite (p_n).
   (c) Écrire une fonction Python qui retourne la valeur de n pour laquelle $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$?
   Quelle est cette valeur ?

Corrigé

6. Thème : géométrie repérée (Spécialité de Terminale uniquement)

Exercice 34 (droites)**.**

1. Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-2\,;3)$ et $B(5\,;1)$.
   Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Dans un repère orthonormé, on considère le point $C\left(-\dfrac{1}{2}\,;5\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$.
   Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par C et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.
3. Dans un repère orthonormé, on considère le point $D(0\,;1)$.
   Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par D et perpendiculaire à la droite d'équation $2x - y + 5 = 0$.

Corrigé ✎

Exercice 35 (cercles)**.**
Dans chacun des cas suivants, déterminer le centre et le rayon du cercle si l'équation donnée correspond bien à un cercle.

1. $x^2 + 3x + y^2 - 4y = 0$
2. $x^2 - x + y^2 - 3y + 1 = 0$
3. $x^2 + 6x + y^2 - 4y + 14 = 0$

Corrigé ✎

Exercice 36 (droites)**.**

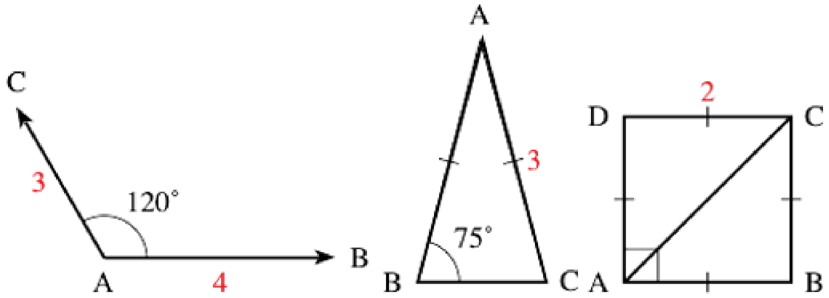
1. Déterminer une équation cartésienne de la droite D passant par le point $A(2\,;7)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(1\,;3)$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ passant par le point $B(4\,;-2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(2\,;1)$.
3. Déterminer les coordonnées du point I intersection des droites D et Δ.

Corrigé ✎

7. Thème : produit scalaire (Spécialité de Terminale uniquement)

Exercice 37 (formules du produit scalaire)**.**

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ pour les trois figures :



Corrigé

Exercice 38 (calcul d'angle)**.**
$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 7$, $AD = 3$ et $AC = 8$.

1. (a) Démontrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3$.

   (b) En calculant $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ d'une autre façon, calculer $\cos \widehat{BAD}$. En déduire $\sin \widehat{BAD} = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$.

2. On admet que l'aire du triangle BAD est donnée par la formule $\dfrac{1}{2} AB \times AD \times \sin \widehat{BAD}$.
   Calculer l'aire du triangle BAD et en déduire l'aire du parallélogramme $ABCD$.

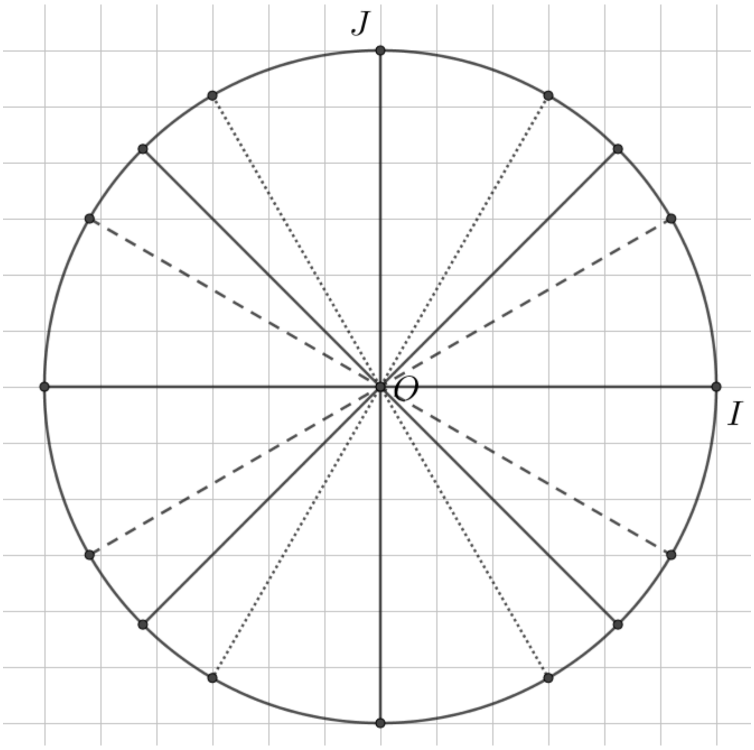
Corrigé

8. Thème : trigonométrie (Spécialité de Terminale uniquement)

Exercice 39 (cercle trigonométrique, sinus et cosinus)**.**
Pour cet exercice, l'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée.

1. Placer les points suivants sur le cercle trigonométrique :

$A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ $\quad B\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ $\quad C\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ $\quad D\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$ $\quad E\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$ $\quad F\left(\frac{\pi}{6}\right)$.



2. Donner la valeur exacte des nombres suivants :

- $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$
- $\sin(-7\pi)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
- $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
- $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$
- $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Corrigé ✎

Exercice 40 (équation et inéquation)**.**
Soit f la fonction définie sur $]-\pi;\pi]$ par : $\quad f(x) = 4(\cos(x))^2 + 2(\sqrt{2}-1)\cos(x) - \sqrt{2}$.
Le but de l'exercice est de trouver les solutions de l'équation $f(x) = 0$ et de l'inéquation $f(x) > 0$.

1. On pose $X = \cos(x)$
   (a) Résoudre sur $[-1;1]$ l'équation $4X^2 + 2(\sqrt{2}-1)X - \sqrt{2} = 0$.
   On notera X_1 et X_2 les solutions obtenues.
   (b) En déduire les solutions sur $]-\pi;\pi]$ de l'équation $f(x) = 0$.
2. On pose $X = \cos(x)$.
   (a) Résoudre sur $[-1;1]$ l'inéquation $4X^2 + 2(\sqrt{2}-1)X - \sqrt{2} > 0$.
   (b) En déduire les solutions sur $]-\pi;\pi]$ de l'inéquation $f(x) > 0$.

Corrigé ✎

Exercice 41 (une étude de fonction périodique)**.**
Le but de ce problème est d'étudier la fonction $f : x \mapsto (\cos(x))^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. La fonction f est-elle paire ? Impaire ? Ni l'un ni l'autre ?
2. Montrer que f est π-périodique.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(x)$.
4. Déterminer les variations de f sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
5. Cela suffit-il à connaître les variations de f sur tout $\mathbb{R}$?

Corrigé ✎

9. Quelques liens utiles

- Des cours de première du Lycée A. Londres
- Les cours et vidéos de Y. Monka
- Des exercices en ligne sur LaboMEP
- Des exercices en ligne sur Kwyk

10. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1. $u_0 = 3 \times 0^2 - 2 \times 0 + 11 = 11$ $\quad u_1 = 3 \times 1^2 - 2 \times 1 + 11 = 12$ $\quad u_2 = 3 \times 2^2 - 2 \times 2 + 11 = 19$
2. $u_0 = 5$ $\quad u_1 = 3 \times 5 - 1 = 14$ $\quad u_2 = 3 \times 14 - 1 = 41$
3. $u_0 = -2$ $\quad u_1 = 5 \times (-2) + 0^2 - 10 = -20$ $\quad u_2 = 5 \times (-20) + 1^2 - 10 = -109$
4. $u_1 = \dfrac{3}{2 \times 1 - 1} = 3$ $\quad u_2 = \dfrac{3}{2 \times 2 - 1} = 1$ $\quad u_3 = \dfrac{3}{2 \times 3 - 1} = \dfrac{3}{5}$
5. $u_1 = -3$ $\quad u_2 = 4 \times (-3) + (-3)^2 = -3$ $\quad u_3 = 4 \times (-3) + (-3)^2 = -3$

   Vous pouvez essayer de démonter que (u_n) est la suite constante égale à 3.
6. $u_5 = \dfrac{5^2+3}{5-4} = 28$ $\quad u_6 = \dfrac{6^2+3}{6-4} = \dfrac{39}{2}$ $\quad u_7 = \dfrac{7^2+3}{7-4} = \dfrac{52}{3}$

Retour à l'exercice ⏪

Corrigé de l'exercice 2.

1. (u_n) est arithmétique de raison $r = 1,32$, de premier terme $u_0 = -1$

   $u_{15} = -1 + 15 \times 1,32 = 18,8$
2. (v_n) est géométrique de raison $q = 0,99$, de premier terme $v_0 = 1$

   $v_{15} = 1 \times 0,99^{15} \approx 0,86$
3. (w_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$, de premier terme $w_0 = -3$

   $w_{15} = -3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{15} \approx -0,000\,09$
4. (z_n) est arithmétique de raison $r = 2$, de premier terme $u_1 = -3 + 2 \times 1 = -1$

   $z_{15} = -1 + 14 \times 2 = 27$
5. $\dfrac{t_{n+1}}{t_n} = 0,1 \iff t_{n+1} = 0,1t_n$ donc (t_n) est géométrique de raison $q = 0,1$, de premier terme $t_1 = -3$

   $t_{15} = -3 \times 0,1^{15-1} = -3 \times 0,1^{14} = -3 \times 10^{13}$
6. (r_n) est arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{3}$, de premier terme $u_0 = \dfrac{1}{5}$

   $r_{15} = \dfrac{1}{5} + 15 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{26}{5}$

Retour à l'exercice ⏪

Corrigé de l'exercice 3.

1. (u_n) est une suite géométrique de raison $r = 3 > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.

   Autre méthode :

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $u_{n+1} - u_n = -1 + 3(n+1) - (-1+3n) = -1 + 3n + 3 + 1 - 3n = 3 > 0$ donc $u_{n+1} > u_n$

   Donc (u_n) est strictement croissante.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1 - (2n^2 - 3n + 1) \\ &= 2n^2 + 4n + 2 - 3n - 3 + 1 - 2n^2 + 3n - 1 \\ &= 4n - 1 \end{aligned}$$

   Or $n \in \mathbb{N}^*$ donc $4n - 1 > 0$ et donc $v_{n+1} - v_n > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.
3. (w_n) est géométrique de raison $0 < 0,2 < 1$ et de premier terme $3 > 0$ donc d'après le cours (w_n) est strictement décroissante.

Retour à l'exercice ⏪

Corrigé de l'exercice 4.

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \pi$.
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$

Retour à l'exercice ⏪

Corrigé de l'exercice 5.

1. $S = 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 31$

   S est la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 1$.

   Cette somme comporte 11 termes car $u_0 = 1$ et $u_{10} = 1 + 3 \times 10 = 31$.

   Donc $S = \dfrac{(1+31)}{2} \times 11 = 176$.
2. $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 256$

   S est la somme des termes d'une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.

   Cette somme comporte 9 termes car $u_0 = 1$ et $u_8 = 1 \times 2^8 = 256$.

   Donc $S = 1 \times \dfrac{1-2^9}{1-2} = \dfrac{1-512}{-1} = 511$.
3. $S = 12 \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{100}}{1 - \dfrac{1}{3}} \approx 18$
4. Le dernier terme de cette somme vaut $-123 + 2025 \times 1,5 = 2914,5$.

   Donc $S = \dfrac{-123 + 2914,5}{2} \times 2025 = 2\,826\,393,75$.

Retour à l'exercice ⏪

Corrigé de l'exercice 6.

1. Réduire de $1,5$ % revient à multiplier par $0,985$. Donc $d_1 = 400 \times 0,985 = 394$.

   En 2019 la masse moyenne de déchets ménagers était de 394 kg.
2. (a) D'après ce qui précède, $d_{n+1} = 0,985 d_n$ donc (d_n) est géométrique de raison $q = 0,985$ et de premier terme égal à $d_0 = 400$.

   (b) $d_n = d_0 \times q^n = 400 \times 0,985^n$.

   (c) $2023 = 2018 + 5$ et $u_5 = 400 \times 0,985^5 \approx 371$.

   La masse moyenne de déchets ménagers en 2023 était environ égale à 371 kg.
3.

```python
def seuil () :
    d=400
    n=2018
    while d>=365:
        d=d*0.985
        n=n+1
    return(n)
```

Retour à l'exercice ⏪

Corrigé de l'exercice 7.

1. Pour Camille : $14\,400 + 600 \times 2 = 15\,600$. Son salaire était de 15 600 € en 2012.
   Pour Dominique : $13\,200 \times 1,04^2 = 14\,277,12$ (car augmenter de 4 % revient à multiplier par $1,04$). Son salaire était de $14\,277,12$ € en 2012.
2. (a) (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 600$ et de premier terme $u_0 = 14\,400$.
   (b) $u_n = 14\,400 + 600n$ pour tout entier naturel n.
   $u_n > 20\,000 \iff 14\,400 + 600n > 20\,000 \iff 600n > 5\,600 \iff n \geq \dfrac{5\,600}{600}$.
   Or $\dfrac{5\,600}{600} \approx 9,33$ donc son salaire dépassera les 20 000 euros en $2010 + 10$ soit en 2020.
   (c) $v_{n+1} = 1,04 v_n$ pour tout entier naturel n.
   (d) Avec la calculatrice, on trouve :
   $u_{13} = 22\,200 > v_{13} \approx 21\,979$ puis $u_{14} = 22\,800 < v_{14} \approx 22\,858$ et .
   Donc à partir de $2010 + 14 = 2024$ le salaire de Dominique dépasse celui de Camille.

Retour à l'exercice ◀◀

Corrigé de l'exercice 8.

1. $a = 2$, $b = -8$ et $c = 3$ donc $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-8}{2 \times 2} = 2$ et $\beta = f(\alpha) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 3 = -5$
   Donc $P(x) = 2(x-2)^2 - 5$.
   Autre méthode : $P(x) = 2\left(x^2 - 4x\right) + 3 = 2\left((x-2)^2 - 4\right) + 3 = 2(x-2)^2 - 8 + 3 = 2(x-2)^2 - 5$.
2. Le sommet de la parabole associée a pour coordonnées $(\alpha, \beta) = (2\,; -5)$.

Retour à l'exercice ◀◀

Corrigé de l'exercice 9.

- $x^2 - 5x + 6 = 0$
  $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$.
  $\Delta > 0$ donc deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \dfrac{5-1}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \dfrac{5+1}{2} = 3$
  $\boxed{\mathcal{S} = \{2\,; 3\}}$.
- $4x^2 - 12x + 9 = 0$
  $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 9 = 144 - 144 = 0$.
  $\Delta = 0$ donc il y a une racine double :
  $x_0 = x = \dfrac{-(-12)}{2 \times 4} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$.
  $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}}$.
- $2x^2 + 3x + 5 = 0$
  $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 5 = 9 - 40 = -31$.
  $\Delta < 0$ donc il n'y a pas de solution réelle.
  $\boxed{\mathcal{S} = \varnothing}$.

- $-3x^2+12x-5=0$

  $\Delta = 12^2-4\times(-3)\times(-5) = 144-60 = 84.$

  $\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles :

  $x_1 = \dfrac{-12-\sqrt{84}}{2\times(-3)} = \dfrac{-12-2\sqrt{21}}{-6} = \dfrac{6+\sqrt{21}}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-12+\sqrt{84}}{2\times(-3)} = \dfrac{-12+2\sqrt{21}}{-6} = \dfrac{6-\sqrt{21}}{3}$.

  $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{6-\sqrt{21}}{3} ; \dfrac{6+\sqrt{21}}{3}\right\}}$.

- $x^2-7x+10<0$

  $\Delta = (-7)^2-4\times1\times10 = 49-40 = 9.$

  $\Delta > 0$ donc deux racines réelles :

  $x_1 = \dfrac{-(-7)-\sqrt{9}}{2\times1} = \dfrac{7-3}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-(-7)+\sqrt{9}}{2\times1} = \dfrac{7+3}{2} = 5$

  $a>0$ donc le tableau de signes est le suivant :

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
signe de $x^2-7x+10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  $\boxed{\mathcal{S} =]2,5[}$

- $x^2-6x+9 \geq 0$

  $\Delta = (-6)^2-4\times1\times9 = 36-36 = 0$

  $\Delta = 0$ donc une racine double $x_0 = \dfrac{-(-6)}{2\times1} = \dfrac{6}{2} = 3.$

  De plus $a=1>0$ donc le polynôme est positif sur $\mathbb{R}$.

  $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}}$

- $x^2-4x \leq 0$

  $\Delta = (-4)^2-4\times1\times0 = 16$

  $\Delta > 0$ donc deux racines réelles :

  $x_1 = \dfrac{-(-4)-\sqrt{16}}{2\times1} = \dfrac{4-4}{2} = 0$ et $x_2 = \dfrac{-(-4)+\sqrt{16}}{2\times1} = \dfrac{4+4}{2} = 4$

  $a>0$ donc le tableau de signes est le suivant :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
signe de x^2-4x		$+$	0	$-$	0	$+$	

  $\mathcal{S} = [0;4]$

- $-x^2+4x-3<0$

  $\Delta = 4^2-4\times(-1)\times(-3) = 16-12 = 4.$

  $\Delta > 0$ donc deux racines réelles :

  $x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{4}}{2\times(-1)} = \dfrac{-4-2}{-2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{-4+\sqrt{4}}{2\times(-1)} = \dfrac{-4+2}{-2} = 1$

  $a<0$ donc le tableau de signes est le suivant :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
signe de $-x^2+4x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

  $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty;1[\cup]3;+\infty[}$

Retour à l'exercice ◀◀

Corrigé de l'exercice 10.

1. $h(0) = 15$ donc la hauteur du projectile est de 15 m à l'instant $t = 0$.
2. Le coefficient a du polynôme de degré 2 est négatif ($a = -5$) donc il existe bien un maximum atteint pour $t = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{20}{2 \times (-5)} = 2$ soit au bout de 2 secondes.
3. La hauteur maximale est donc $h(2) = -5 \times 2^2 + 20 \times 2 + 15 = 35$ mètres.
4. Le projectile touche le sol lorsque $h(t) = 0$. On résout donc cette équation.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 20^2 - 4 \times (-5) \times 15 = 700 > 0$ donc deux racines réelles :
   $t_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-20 - \sqrt{700}}{2 \times (-5)} = 2 - \sqrt{7}$ et $t_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-20 + \sqrt{700}}{2 \times (-5)} = 2 + \sqrt{7}$
   Or t représente le temps donc $t \geq 0$ et donc la seule solution valide est $t_2 = 2 + \sqrt{7} \approx 4,65$.
   Le projectile touche le sol au bout d'environ $4,65$ secondes.

Retour à l'exercice ◀◀

Corrigé de l'exercice 11.

1. Le polynôme admet deux racines donc il peut s'écrire $a(x - x_1)(x - x_2)$ et donc en développant il s'écrit $ax^2 - a(x_1 + x_2) + ax_1x_2$
   Puisque $ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2) + ax_1x_2$ on obtient par identification des coefficients :
   $b = -a(x_1 + x_2)$ et $c = ax_1x_2$
   Donc $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$ d'où le résultat.
2. Ici $a = 1$, $b = -5$ et $c = 6$ donc $x_1 + x_2 = -\dfrac{-5}{1} = 5$ et $x_1x_2 = \dfrac{6}{1} = 6$.
   On chercher donc deux réels de somme 5 et de produit 6. Les racines sont donc 2 et 3.

Retour à l'exercice ◀◀

Corrigé de l'exercice 12.

1. L'abscisse du sommet vérifie $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{2 \times (-1)} = 3$.
   L'ordonnée est égale à $P(3) = -3^2 + 6 \times 3 - 5 = 4$. Donc $S(3\,;4)$.
2. $a = -1 < 0$ donc on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$(-\infty)$ ↗	4	↘ $(-\infty)$

Les limites sont données à titre indicatif.

3. La courbe de P admet la droite d'équation $x = 3$ pour axe de symétrie.
   Donc $P(-7) = P(3 - 10) = P(3 + 10) = P(13) = -96$.

Retour à l'exercice ◀◀

Corrigé de l'exercice 13.

1. $g(1) = 1^2 + 2 \times 1 - 3 = 0$ et $g(-3) = (-3)^2 + 2 \times (-3) - 3 = 0$ donc -3 et 1sont les racines de g.
2. L'axe de symétrie de la courbe de g est la droite d'équation $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{-3+1}{2} = -1$.

Retour à l'exercice

Corrigé de l'exercice 14.

1. On note x la longueur du rectangle et y sa largeur.
   On a $2x + 2y = 600 \iff x + y = 300 \iff y = 300 - x. A(x) = l \times L = x \times (300 - x) = -x^2 + 300x$.
2. L'aire est maximale pour $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{300}{2 \times (-1)} = 150$.
   Ainsi l'aire est maximale lorsque $x = 150$ mètres donc lorsque le champs est carré.
   L'aire du champs vaut alors $150^2 = 22\,500$ m^2.

Retour à l'exercice

Corrigé de l'exercice 15.
Déterminons l'aire de la croix. Elle est composée d'une bande horizontale et d'une bande verticale.
L'aire de la bande horizontale est égale à $4x$ m^2 et l'aire de la bande verticale est égale à $3x$ m^2 .
Attention pour calculer l'aire totale de la croix il faut supprimer l'aire de l'intersection des deux croix pour ne pas la compter deux fois.
Ainsi l'aire de la croix est égale à $4x + 3x - x^2 = -x^2 + 7x$ m^2.
Déterminons maintenant l'aire restante du drapeau.
L'aire du rectangle est égale à $4 \times 3 = 12$ m^2 donc l'aire restante vaut $12 - (-x^2 + 7x) = x^2 - 7x + 12$.
Ainsi on doit résoudre l'équation $x^2 - 7x + 12 = -x^2 + 7x \iff 2x^2 - 14x + 12 = 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \times 2 \times 12 = 100 > 0$ donc deux racines réelles :
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{14 - \sqrt{100}}{2 \times 2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{14 + \sqrt{100}}{2 \times 2} = 6$
La largeur de la bande est comprise entre 0 et 3 mètres, la seule solution valide est $x = 1$ mètre.

Retour à l'exercice

Corrigé de l'exercice 16.

1. $f(-1) = 2,25$, $f(1) = 1$ et puisque les tangentes à $\mathcal{C}_f$ en -1 et 1 sont horizontales, on a $f'(-1) = 0$ et $f'(1) = 0$.
2. $f'(0)$ est le coefficient directeur à $\mathcal{C}_f$ donc celui de la droite (AB).
   Donc $f'(0) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0 - 1,73}{2 - 0} = -0,865$.
   De plus la droite (AB) a pour ordonnée à l'origine $1,73$ donc la tangente cherchée a pour équation $y = -0,865x + 1,73$.

Retour à l'exercice

Corrigé de l'exercice 17.

- f est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ et de coefficient directeur négatif donc décroissante sur $\mathbb{R}$.
  (on peut aussi étudier le signe de la dérivée $f'(x) = -\dfrac{4}{3}$ mais cela est moins pertinent)
- f est un polynôme de degré deux défini sur $\mathbb{R}$ et de coefficient $a < 0$.
  Donc g est croissante sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{b}{2a}\right[=]-\infty\,;-1]$ et décroissante sur $[-1\,;+\infty[$
  Autre méthode : g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -4x - 4$
  $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -4x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ puis on en déduit le même résultat qu'avec l'autre méthode.
- h n'est pas définie lorsque $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ donc elle est définie sur
  $\mathbb{R} - \{-2\} =]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;+\infty[$
  Elle est dérivable sur ce même intervalle et de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 3x + 1$ et $v(x) = x + 2$.
  On a alors $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 1$ et donc :
  $h'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \dfrac{3(x+2) - (3x+1) \times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{5}{(x+2)^2}$.
  Pour tout $x \in \mathcal{D}_h$, $\quad 5 > 0$ et $(x+2)^2 > 0$ donc $h'(x) > 0$ et h est strictement croissante sur $]-\infty\,;-2[$ et sur $]-2\,;+\infty[$.
- La fonction i est définie sur $[0\,;+\infty[$. Dans le cours, on a vu que $\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 mais la fonction i est en revanche bien dérivable en 0.
  En effet, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{i(0+h) - i(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h\sqrt{h} - 0\sqrt{0}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \sqrt{h} = 0$
  Finalement la fonction i est donc dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et de la forme uv avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$.
  On a alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et par suite :
  $i'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x} \times \sqrt{x} + x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$
  Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $\quad \dfrac{3}{2} > 0$ et $\sqrt{x} \geq 0$ donc $i'(x) \geq 0$.
  La fonction i est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
- j est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $j'(x) = 5 \times 3x^2 - 2 \times 2x - 5 = 15x^2 - 4x - 5$.
  Étudions le signe de $j'(x)$ qui est un polynôme de degré 2.
  $\Delta = b^2 - 4ac(-4)^2 - 4 \times 15 \times (-5) = 316 > 0$ donc deux racines réelles.
  $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4 - \sqrt{316}}{2 \times 15} = x_1 = \dfrac{2 - \sqrt{79}}{15} =$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 + \sqrt{79}}{15}$
  Le coefficient a du polynôme de degré 2 étant positif, on obtient :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$j'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$j(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$j(x_1)$	$\searrow$	$j(x_2)$	$\nearrow$	$(+\infty)$

- La fonction k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la forme $(ax+b)^n$ dont la dérivée est $na(ax+b)^{n-1}$.
  Ainsi $k'(x) = 3 \times (-5)(-5x+3)^2 = -15(-5x+3)^2$
  Pour tout réel x, $\quad -15 < 0$ et $(-5x+3)^2 \geq 0$ donc $k'(x) \leq 0$ et la fonction k est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x, $\quad x^2 + 7 > 0$ donc la fonction l est définie sur $\mathbb{R}$.
  Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x^2 - 3$ et $v(x) = x^2 + 7$.
  Donc $u'(x) = 4x$ et $v'(x) = 2x$ et on a alors :
  $l'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \dfrac{(4x)(x^2+7) - (2x^2-3)(2x)}{(x^2+7)^2} = \dfrac{34x}{(x^2+7)^2}$.

Pour tout réel x, $\quad (x^2+7)^2 > 0$ donc le signe de $l'(x)$ est le même que celui de $34x$ donc que celui de x.
Ainsi $l'(x) \geq 0$ lorsque $x \geq 0$ et $l'(x) \leq 0$ lorsque $x \leq 0$.
l est donc décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

- m est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la forme uv avec $u(x) = x^2+1$ et $v(x) = x^3-2x$.
  Donc $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 3x^2-2$.
  D'où $m'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2x(x^3-2x) + (x^2+1)(3x^2-2) = (x-1)(x+1)(5x^2+2)$
  Pour vérifier la dernière égalité, il suffit de développer chaque membre.
  Pour tout réel x, $\quad 5x^2+2 > 0$ donc le signe de $m'(x)$ dépend des facteurs $x-1$ et $x+1$, d'où :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$m'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$m(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$(+\infty)$

Retour à l'exercice ⏪

Corrigé de l'exercice 18.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$.
   $$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 : \quad & y = f'(1)(x-1) + f(1) \\ \Leftrightarrow \quad & y = 2 \times 1(x-1) + 1^2 + 3 \\ \Leftrightarrow \quad & y = 2x+2 \end{aligned}$$
2. g est dérivable sur $]-\infty\,;-2[$ et sur $]-2\,;+\infty[$ et de la forme $3 \times \dfrac{1}{v}$ avec $v(x) = x+2$ et donc $v'(x) = 1$
   Ainsi $g'(x) = 3 \times \dfrac{-v'(x)}{(v(x))^2} = \dfrac{-3}{(x+2)^2}$
   $$\begin{aligned} \mathcal{T}_0 : \quad & y = g'(0)(x-0) + g(0) \\ \Leftrightarrow \quad & y = \frac{-3}{(0+2)^2}x + 1,5 \\ \Leftrightarrow \quad & y = -0,75x + 1,5 \end{aligned}$$

Retour à l'exercice ⏪

Corrigé de l'exercice 19.

1. (a) $B(50) = R(50) - C(50) = 912 \times 50 - (0,04 \times 50^3 - 0,4 \times 50^2 + 380 \times 50 + 6\,000) = 16\,600$.
   Le bénéfice réalisé est de 16 600 euros.
   (b) $R(x) = 912x$ et $B(x) = R(x) - C(x)$
   Donc $B(x) = 912x - (0,04x^3 - 0,4x^2 + 380x + 6\,000) = -0,04x^3 + 0,4x^2 + 532x - 6\,000$
2. (a) B est dérivable sur $[0\,;100]$.
   $B'(x) = -0,04 \times 3x^2 + 0,4 \times 2x + 532 = -0,12x^2 + 0,8x + 532$.

(b) $B'(x)$ est un trinôme du second degré.
$\Delta = b^2 - 4ac = 0,8^2 - 4 \times (-0,12) \times 532 = 256$
$\Delta > 0$, il y a donc deux racines réelles distinctes :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-0,8-\sqrt{256}}{2\times(-0,12)} = 70$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-0,8+\sqrt{256}}{2\times(-0,12)} = -\dfrac{190}{3}$

$a = -0,04 < 0$ donc le trinôme $B'(x)$ est positif entre ses racines x_1 et x_2. De plus x_2 n'est pas dans l'intervalle $[0\,;100]$

On en déduit ainsi :

x	0		70		100
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	$-6\,000$	$\nearrow$	$19\,480$	$\searrow$	$11\,200$

3. D'après les variations de la fonction B on en déduit que l'entreprise doit fabriquer et vendre 70 canapés pour réaliser un bénéfice maximal.
$B(70) = 912 \times 70 - (0,04 \times 70^3 - 0,4 \times 70^2 + 380 \times 70 + 6\,000) = 19\,480$
Le bénéfice est alors de 19 480 €.

Retour à l'exercice ⏪

Corrigé de l'exercice 20.

1. (a) Le point $O(0\,;0)$ appartient à la parabole donc $f(0) = 0 \Leftrightarrow a \times 0^2 + b \times 0 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$.

   (b) $A \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow f(2) = 4 \Leftrightarrow a \times 2^2 + b \times 2 + 0 = 4 \Leftrightarrow 4a + 2b = 4$.
   $B \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow f(3) = 5,16 \Leftrightarrow a \times 3^2 + b \times 3 + 0 = 5,16 \Leftrightarrow 9a + 3b = 5,16$.
   On obtient donc le système : $\begin{cases} 4a + 2b = 4 \\ 9a + 3b = 5,16 \end{cases}$
   La première ligne donne $2b = 4 - 4a \Leftrightarrow b = 2 - 2a$.
   En substituant dans la deuxième ligne on obtient :
   $9a + 3(2 - 2a) = 5,16 \Leftrightarrow 9a + 6 - 6a = 5,16 \Leftrightarrow 3a = 5,16 - 6 \Leftrightarrow 3a = -0,84 \Leftrightarrow a = -0,28$.
   Et donc $b = 2 - 2a$ donne $b = 2 - 2 \times (-0,28) = 2,56$.

   (c) D'après la question précédente, on a : $a = -0,28$; $b = 2,56$ et $c = 0$
   donc $f(x) = -0,28x^2 + 2,56x$.

2. Le joueur tape sur l'écran lorsque l'oiseau jaune est au point C sur sa trajectoire.
   On admet que l'oiseau jaune suit alors une trajectoire rectiligne suivant la tangente à la courbe de f au point C.

   (a) On cherche donc l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $C(5,5\,;5,61)$.
   - Déterminons par commencer $f'(x)$.
     f dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $f'(x) = -0,28 \times 2x + 2,56 = -0,56x + 2,56$
   - Ainsi $f'(5,5) = -0,56 \times 5,5 + 2,56 = -0,52$
     D'autre par $f(5,5) = 5,61$ d'après l'énoncé.
     Ainsi, la tangente T cherchée a pour équation :

$T : y = f'(5,5)(x-5,5) + f(5,5)$
$T : y = -0,52(x-5,5) + 5,61$
$T : y = -0,52x + 8,47$

(b) L'abscisse x_0 du point d'impact vérifie $-0,52x + 8,47 = 0$
$-0,52x + 8,47 = 0 \Leftrightarrow -0,52x = -8,47 \Leftrightarrow x = \dfrac{-8,47}{-0,52} \Leftrightarrow x = \dfrac{847}{52}$ et $\dfrac{847}{52} \approx 16,3$
Le point d'impact se situe à environ $16,3$ unités de l'origine.

(c) Puisque le cochon occupe 0,7 unité de large, il se situe sur l'axe des abscisses dans l'intervalle $[16 - 0,7 : 2\,; 16 + 0,7 : 2] = [15,65\,; 16,35]$.
D'après la question précédente, le point d'impact se trouve à $16,3$ qui appartient à $[15,65\,; 16,35]$.
Le cochon va donc passer un mauvais quart d'heure !

Retour à l'exercice ◀◀

Corrigé de l'exercice 21.

Déterminons l'aire de la partie hachurée en fonction de $x \in [0\,;12]$.
On rappelle que l'aire d'un disque de rayon r est égale à πr^2.
L'aire du demi disque de diamètre [AB] et de rayon $\dfrac{1}{2}x$ est $C_1(x) = \dfrac{1}{2} \times \pi \left(\dfrac{1}{2}x\right)^2 = \dfrac{\pi x^2}{8}$
L'aire du demi disque de diamètre [BC] et de rayon $\dfrac{1}{2}(12-x)$ est $C_2(x) = \dfrac{1}{2} \times \pi \left(\dfrac{1}{2}(12-x)\right)^2 = \dfrac{(12-x)^2\pi}{8}$
L'aire du demi disque de diamètre [AC] et de rayon 6 est $C_3(x) = \dfrac{1}{2}\pi \times 6^2 = 18\pi$
L'aire hachurée est donc égale à :
$H(x) = C_3(x) - (C_1(x) + C_2(x)) = 18\pi - \left(\dfrac{\pi x^2}{8} + \dfrac{(12-x)^2\pi}{8}\right) = -\dfrac{\pi}{4}x^2 + 3\pi\, x$
La fonction H est dérivable sur $[0\,;12]$ et $H'(x) = -\dfrac{\pi}{2}x + 3\pi$
Donc $H'(x)$ s'annule et change de signe lorsque $-\dfrac{\pi}{2}x + 3\pi = 0 \Leftrightarrow x = 6$.
Puisque la fonction H s'annule et change de signe en $x = 6$ et que $6 \in [0\,;12)$, on en déduit que l'aire maximale est atteinte lorsque $x = 6$ cm et elle vaut $H(6) = 9\pi$ cm^2.

Retour à l'exercice ◀◀

Corrigé de l'exercice 22.

1. $\left(e^{-4x}\right)\left(e^{2x}\right)^3 = e^{-4x} \times e^{6x} = e^{2x}$
2. $\dfrac{e^{x-2}}{e^{-x+5}} = e^{x-2-(-x+5)} = e^{x-2+x-5} = e^{2x-7}$
3. $\dfrac{\left(e^{3x}\right)\left(e^{-2x}\right)^5}{e^{-x}} = \dfrac{e^{3x-10x}}{e^{-x}} = \dfrac{e^{-7x}}{e^{-x}} = e^{-7x-(-x)} = e^{-6x}$
4. $\dfrac{e^{-x} + e^x}{e^x} = \dfrac{e^{-x}}{e^x} + \dfrac{e^x}{e^x} = e^{-2x} + 1$

Retour à l'exercice ◀◀

Corrigé de l'exercice 23.

1. $e^{3-x} = 1 \iff e^{3-x} = e^0 \iff 3 - x = 0 \iff x = 3 \qquad \mathcal{S} = \{3\}$
2. $e^{2x^2+3} = e^{7x} \iff 2x^2 + 3 = 7x \iff 2x^2 - 7x + 3 = 0$
   $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 > 0$ donc deux solutions réelles :
   $x_1 = \dfrac{7-5}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{7+5}{4} = 3 \qquad \mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{2}\,;3\right\}$

3. $2e^{-x} = \dfrac{1}{e^x+2} \iff 2e^{-x}(e^x+2) = 1 \text{ (car } e^x+2 \neq 0) \iff 2+4e^{-x} = 1 \iff 4e^{-x} = -1$
   Or $4e^{-x} > 0$ pour tout réel x, donc cette équation n'a pas de solution. $\mathcal{S} = \varnothing$

4. $(e^x)^3 > e^{x+6} \iff 3x > x+6 \iff 2x > 6 \iff x > 3$
   L'ensemble solution est $\mathcal{S} =]3\,;+\infty[$

5. $e^x \leq \dfrac{1}{e^x} \iff (e^x)^2 \leq 1 \text{ (car } e^x > 0) \iff e^{2x} \leq 1 \iff 2x \leq 0 \iff x \leq 0$
   L'ensemble solution est $\mathcal{S} =]-\infty\,;0]$

6. $e^{x^2-3} \leq e^{-2x} \iff x^2-3 \leq -2x \iff x^2+2x-3 \leq 0$
   $\Delta = 2^2 - 4\times 1\times(-3) = 16 > 0$ donc deux solutions réelles :
   Les racines sont $x_1 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$
   L'ensemble solution est $\mathcal{S} = [-3\,;1]$

Retour à l'exercice ◀◀

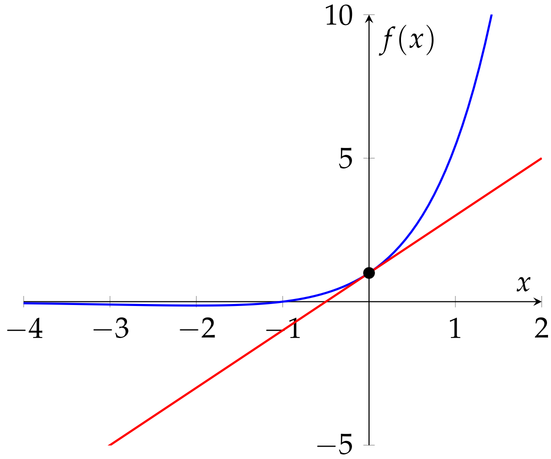
Corrigé de l'exercice 24.

1. forme uv avec $u(x) = x^2-2x$ et $v(x) = e^x$ et donc $u'(x) = 2x-2$ et $v'(x) = e^x$.
   $f'(x) = (2x-2)e^x + (x^2-2x)e^x = (x^2-2x+2x-2)e^x = (x^2-2)e^x$
2. forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x-1$ et $v'(x) = 2e^x+1$ et donc $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 2e^x$
   $f'(x) = \dfrac{e^x\times(2e^x+1)-(e^x-1)(2e^x)}{(2e^x+1)^2} = \dfrac{3e^x}{(2e^x+1)^2}$
3. forme e^{ax+b} donc $f'(x) = -2e^{-2x+3}$
4. forme uv avec $u(x) = 2x-5$ et $v(x) = e^{\frac{1}{2}x+4}$ donc $u'(x) = 2$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x+4}$
   $f'(x) = 2\times e^{\frac{1}{2}x+4} + (2x-5)\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x+4} = \left(2+(2x-5)\dfrac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{2}x+4} = \left(x-\dfrac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{2}x+4}$

Retour à l'exercice ◀◀

Corrigé de l'exercice 25.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la forme $u\times v$ avec $u(x) = x+2$ et $v(x) = e^x$ donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$.
   $f'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $x+2$.
   Ainsi f est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-2]$ et croissante sur l'intervalle $[-2;+\infty[$.
3. Calculons $f(0)$ et $f'(0)$:
   $f(0) = (0+1)e^0 = 1, \quad f'(0) = (0+2)e^0 = 2$
   L'équation de la tangente est donnée par : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$ soit $y = 2x+1$
4.



Retour à l'exercice ⏪

Corrigé de l'exercice 26.

1. $R(7) \approx 0,868\,869$. Le bénéfice réalisé par la fabrication et la vente de 7 centaines de litres soit 700 litres de produit est d'environ 8 689 euros.
2. $R(4) \approx -3,67879$. On obtient un résultat négatif correspondant à un déficit d'environ 36 788 euros pour la fabrication et la vente de 400 litres de produit.
3. Pour tout réel x de $[2;20]$, $\mathrm{e}^{-0,25x} > 0$ donc $R(x) \geq 0 \iff 5x - 30 \geq 0 \iff x \geq 6$.
   L'entreprise réalise un bénéfice pour la fabrication et la vente de 600 litres de produit.
4. R est dérivable sur $[2\,;20]$ et de la forme $u \times v$, donc $R'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$.
   On a $u(x) = 5x - 30$ donc $u'(x) = 5$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-0,25x}$ donc $v'(x) = -0,25\mathrm{e}^{-0,25x}$.
   Ainsi,
   $$\begin{aligned} R'(x) &= 5\mathrm{e}^{-0,25x} + (5x-30) \times (-0,25)\mathrm{e}^{-0,25x} \\ &= (5 - 0,25 \times 5x + 0,25 \times 30)\mathrm{e}^{-0,25x} \\ &= (-1,25x + 12,5)\mathrm{e}^{-0,25x}. \end{aligned}$$
   Pour tout réel x de $[2;20]$, $\mathrm{e}^{-0,25x} > 0$, donc $R'(x)$ est du signe de $-1,25x + 12,5$.
   $-1,25x + 12,5 \geq 0 \iff -1,25x \geq -12,5 \iff x \leq \frac{-12,5}{-1,25} \iff x \leq 10$.
   Ainsi, $R'(x) \geq 0$ pour $x \leq 10$ et $R'(x) \leq 0$ pour $x \geq 10$. R est donc croissante sur l'intervalle $[2;10]$ et décroissante sur l'intervalle $[10;20]$. Elle admet un maximum pour $x = 10$ et ce maximum est $R(10) \approx 1,6417$.
   L'entreprise doit produire et vendre 1000 litres de produit pour réaliser un bénéfice maximal d'environ 16 417 euros.

Retour à l'exercice ⏪

Corrigé de l'exercice 27.

1. $f(0) = 1375 + 25 = 1400$. À la sortie du four, la température des pièces est de 1400°C.
2. $f'(t) = 1375 \times (-0,075)\mathrm{e}^{-0,075t} = -103,125\mathrm{e}^{-0,075t}$. Pour tout réel t positif, $f'(t) < 0$ car $-103,125 < 0$ et $\mathrm{e}^{-0,075t} > 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $[0;+\infty[$. Le résultat était prévisible, en effet les pièces vont se refroidir à la sortie du four.
3. $f(10) \approx 674,5$ et $f(14) \approx 506,16$. Les pièces ne peuvent pas encore être modelées 10 heures après la sortie du four mais peuvent l'être 14 heures après.

4. Voici le programme Python :

```python
from math import exp

def seuil( ) :
    t = 0
    while 1375 * exp(-0.075 * t) + 25 > 600 :
        t = t + 0.1
    return t
```

Il faut attendre 11,7 heures avant de pouvoir modeler les pièces.

Retour à l'exercice ⏪

Corrigé de l'exercice 28.

Notons p la probabilité d'obtenir 1.

La probabilité de chaque face étant proportionnelle à son numéro, la probabilité d'obtenir 2 est égale à $2p$, celle d'obtenir 3 à $3p$,..., celle d'obtenir 6 à $6p$.

La somme des probabilité étant égale à 1, on a : $p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 1 \Leftrightarrow 21p = 1 \Leftrightarrow p = \dfrac{1}{21}$.

Ainsi la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\dfrac{1}{21}$	$\dfrac{2}{21}$	$\dfrac{3}{21}$	$\dfrac{4}{21}$	$\dfrac{5}{21}$	$\dfrac{6}{21}$

Retour à l'exercice ⏪

Corrigé de l'exercice 29.

1. $P(A \cup B) = P(A) + p(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A)$

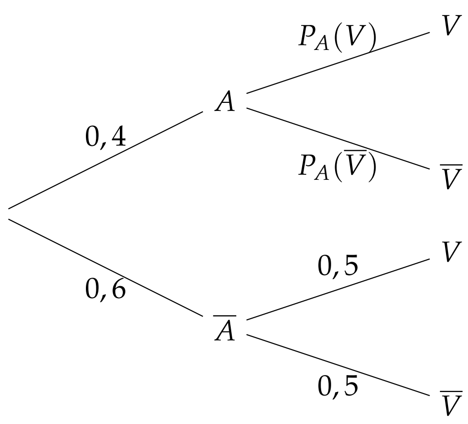
   Donc $P(B) = 0,7 + 0,2 - 0,3 = 0,6$ et par suite $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,6 = 0,4$.

2. $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,44 = 0,56$ et $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0,63 = 0,37$

   Or $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ donc $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,56 + 0,37 - 0,32 = 0,61$

Retour à l'exercice ⏪

Corrigé de l'exercice 30.



1.

2. $P(A \cap V) = P(A) \times P_A(V)$ donc $P_A(V) = \dfrac{P(A \cap V)}{P(A)} = \dfrac{0,12}{0,4} = 0,3$.
3. On utilise la formule des probabilités totales :
   $P(V) = P(A \cap V) + P(\overline{A} \cap V) = 0,12 + 0,6 \times 0,5 = 0,42$
4. $P_{\overline{V}}(A) = \dfrac{P(A \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} = \dfrac{0,4 \times (1 - 0,3)}{1 - 0,42} = \dfrac{0,28}{0,58} \approx 0,49$.
5. Les évènements étant indépendants, on a $p = P(\overline{V}) \times P(\overline{V}) = 0,58^2 = 0,336\,4$.

Retour à l'exercice ◀◀

Corrigé de l'exercice 31.

1. Les valeurs prises par X sont : $-2\,;98\,;148\,;498$.
2. La loi de probabilité de X peut être résumée dans le tableau suivant :

x_i	-2	98	148	498
$P(X = x_i)$	$\dfrac{1\,992}{2\,000}$	$\dfrac{5}{2\,000}$	$\dfrac{2}{2\,000}$	$\dfrac{1}{2\,000}$

3. $E(X) = -2 \times \dfrac{1\,992}{2\,000} + 98 \times \dfrac{5}{2\,000} + 148 \times \dfrac{2}{2\,000} + 498 \times \dfrac{1}{2\,000} = -1,35$
   On constate donc que le jeu n'est pas équilibré et qu'il n'est pas en faveur du joueur puisque le gain moyen estimé est une perte de $1,35$ euros.
4. On cherche n tel que :

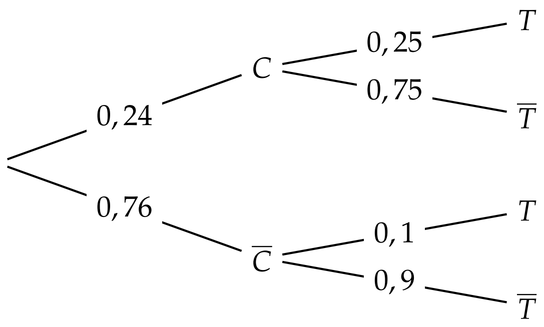
$$\begin{aligned}
E(X) = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad -2 \times \frac{n-8}{n} + 98 \times \frac{5}{n} + 148 \times \frac{2}{n} + 498 \times \frac{1}{n} = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{-2n + 16 + 490 + 296 + 498}{n} = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{-2n + 1300}{n} = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad -2n + 1300 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad n = 650
\end{aligned}$$

   L'association doit vendre 650 billets pour que le jeu soit équitable.

Retour à l'exercice ◀◀

Corrigé de l'exercice 32.

1. Voici l'arbre pondéré :



2. $P(C \cap T) = P(C) \times P_C(T) = 0,24 \times 0,25 = 0,06$.

   La probabilité qu'un client achète un canapé et une table basse est 0,06.

3. D'après la propriétés des probabilités totales, on a :

   $P(T) = P(C \cap T) + P(\overline{C} \cap T) = 0,06 + 0,76 \times 0,1 = 0,136$.

   La probabilité qu'un client achète une table basse est de 0,136.

4. Dans ce magasin, le prix moyen d'un canapé est de 1 000 € et le prix moyen d'une table basse est de 300 €. On note X la variable aléatoire correspondant à la somme payée par le client.

   (a)

x_i	0	300	1 000	1 300
$P(X = x_i)$	0,684	0,076	0,18	0,06

   $P(X = 0) = P(\overline{C} \cap \overline{T}) = 0,76 \times 0,9 = 0,684$

   $P(X = 300) = P(\overline{C} \cap T = 0,76 \times 0,1 = 0,076$

   $P(X = 1\,000) = P(C \cap \overline{T}) = 0,24 \times 0,75 = 0,18$

   $P(X = 1\,300) = P(C \cap T) = 0,06$ (d'après la question 2).

   (b) $E(X) = 0 \times 0,684 + 300 \times 0,076 + 1\,000 \times 0,18 + 1\,300 \times 0,06 = 280,8$.

   Si l'on considère un grand nombre de clients, le montant moyen dépensé par un client de ce magasin est de 280,80 €.

Retour à l'exercice ◀◀

Corrigé de l'exercice 33.

1. Ne pas hésiter à construire un arbe pondéré.

   $p_2 = P(G_2)$, d'après la propriété des probabilités totales, on a :

   $P(G_2) = P(G_1 \cap G_2) + P(\overline{G_1} \cap G_2) = 0,1 \times 0,8 + 0,9 \times 0,6 = 0,62$.

2. $P_{G_2}(\overline{G_1}) = \dfrac{P(\overline{G_1} \cap G_2)}{P(G_2)} = \dfrac{0,9 \times 0,6}{0,62} \approx 0,87$.

3. Notons A l'évènement : « le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières »

   $P(A) = P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3}) = 1 - 0,9 \times 0,4 \times 0,4 = 0,856$.

   La probabilité cherchée est de 85,6 %.

4. D'après la propriété des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} & P(G_{n+1}) = P(G_n \cap G_{n+1}) + P(\overline{G_n} \cap G_{n+1}) \\ \Leftrightarrow\quad & p_{n+1} = p_n \times 0,8 + (1 - p_n) \times 0,6 \\ \Leftrightarrow\quad & p_{n+1} = 0,8p_n + 0,6 - 0,6p_n \\ \Leftrightarrow\quad & p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6 \\ \Leftrightarrow\quad & p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5} \end{aligned}$$

5. (a) $p_5 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^5 \approx 0,75$

   La probabilité que le joueur gagne la 5ème partie est environ égale à 75 %.

   (b) Avec la calculatrice on conjecture $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{3}{4}$.

   (c) Voici une fonction Python répondant à la question :

```
def seuil () :
    P = 0.1
    N = 1
    while 0.75-P > 10**(-7) :
        P = 1/5 * P + 3/5
        N = N + 1
    return N
```

Avec la calculatrice, on trouve $n = 11$.

Retour à l'exercice ◀◀

Corrigé de l'exercice 34.

1. *Première méthode :*

   Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5+2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc une équation cartésienne de (AB) s'écrit : $-2x - 7y + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.
   Or, $A(-2\,;3) \in (AB)$ donc $-2x_A - 7y_A + c = 0 \Leftrightarrow -2 \times (-2) - 7 \times 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = 17$
   Ainsi (AB) : $-2x - 7y + 17 = 0$ ou encore $2x + 7y - 17 = 0$.

   Deuxième méthode (un peu plus longue) :
   Le coefficient directeur de la droite (AB) est $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1-3}{5+2} = -\dfrac{2}{7}$.
   Donc l'équation réduite de (AB) s'écrit $y = -\dfrac{2}{7}x + p$ avec $p \in \mathbb{R}$.
   Or $A(-2\,;3) \in (AB)$ donc $y_A = -\dfrac{2}{7}x_A + p \Leftrightarrow 3 = -\dfrac{2}{7} \times (-2) + p \Leftrightarrow p = 3 - \dfrac{4}{7} \Leftrightarrow p = \dfrac{17}{7}$.
   Ainsi (AB) : $y = -\dfrac{2}{7}x + \dfrac{17}{7}$ et donc une équation cartésienne de cette droite est : $-\dfrac{2}{7}x - y + \dfrac{17}{7} = 0$ ou encore en multipliant par 7 chaque membre $-2x - 7y + 17 = 0$.

2. Une équation cartésienne de cette droite s'écrit : $4x + y + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.
   Or le point C appartient à cette droite donc $4x_C + y_C + c = 0 \Leftrightarrow 4 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 5 + c = 0 \Leftrightarrow c = -3$.
   Une équation cartésienne de cette droite est donc $4x + y - 3 = 0$.

3. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $2x - y + 5 = 0$ et donc un vecteur normal de la droite cherchée.
   (De façon équivalente, on peut aussi dire que le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la droite d'équation $2x - y + 5 = 0$ et donc un vecteur directeur de la droite cherchée.)
   Ainsi cette droite a une équation cartésienne de la forme $x + 2y + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.
   Or le point C appartient à cette droite donc $x_D + 2y_D + c = 0 \Leftrightarrow 0 + 2 \times 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -2$.
   Une équation cartésienne de cette droite est donc $x + 2y - 2 = 0$.

Retour à l'exercice ◀◀

Corrigé de l'exercice 35.

1.
$$\begin{aligned} x^2+3x+y^2-4y=0 &\Leftrightarrow (x+1,5)^2-1,5^2+(y-2)^2-4=0 \\ &\Leftrightarrow (x+1,5)^2+(y-2)^2=6,25 \\ &\Leftrightarrow (x+1,5)^2+(y-2)^2=2,5^2 \end{aligned}$$
C'est donc l'équation d'un cercle de centre $(-1,5\,;2)$ et de rayon $2,5$.

2.
$$\begin{aligned} x^2-x+y^2-3y+1=0 &\Leftrightarrow (x-0,5)^2-0,5^2+(y-1,5)^2-1,5^2+1=0 \\ &\Leftrightarrow (x-0,5)^2+(y-1,5)^2=1,5 \\ &\Leftrightarrow (x-0,5)^2+(y-1,5)^2=\sqrt{1,5}^2 \end{aligned}$$
C'est donc l'équation d'un cercle de centre $(0,5\,;1,5)$ et de rayon $\sqrt{1,5}$.

3.
$$\begin{aligned} x^2+6x+y^2-4y+14=0 &\Leftrightarrow (x+3)^2-3^2+(y-2)^2-2^2+14=0 \\ &\Leftrightarrow (x+3)^2+(y-2)^2=-1 \end{aligned}$$
Une somme de carrés ne peut être négative donc cet ensemble est vide. Il ne s'agit donc pas de l'équation d'un cercle.

Retour à l'exercice ⏪

Corrigé de l'exercice 36.

1. *Méthode 1 :*

   Soit un point $M(x,y)$ de la droite D. $M \in D \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = 0$.

   $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   D'où, $3(x-2)-1(y-7)=0 \Leftrightarrow 3x-y+1=0$.

   Ainsi, $3x-y-1=0$ est une équation cartésienne de D.

   Méthode 2 :

   Par identification avec un vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, on a $-b=1$ et $a=3$.

   Ainsi, D a une équation de la forme $3x-y+c=0$.

   Pour déterminer c, il suffit de substituer les coordonnées de A dans l'équation :

   $3\times 2-7+c=0 \Rightarrow c=1$.

   Donc, $3x-y-1=0$ est une équation cartésienne de D.

2. *Méthode 1 :*

   Soit un point $M(x,y)$ de la droite Δ.

   $M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{n}=0$.

   $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y+2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   D'où, $2(x-4)+1(y+2)=0 \Leftrightarrow 2x+y-6=0$.

   Ainsi, $2x+y-6=0$ est une équation cartésienne de Δ.

   Méthode 2 :

   Par identification avec un vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on a $a=2$ et $b=1$.

   Ainsi, Δ a une équation de la forme $2x+y+c=0$.

   Pour déterminer c, il suffit de substituer les coordonnées de B dans l'équation : $2\times 4-2+c=0 \Leftrightarrow c=-6$.

   Donc, $2x+y-6=0$ est une équation cartésienne de Δ.

3. Les coordonnées (x, y) du point I sont les solutions du système : $\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ 2x + y - 6 = 0 \end{cases}$

   On ajoute les équations membre à membre et on obtient : $5x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

   On reporte dans une des équations : $3 \times 1 - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 4$.

   Ainsi, le point d'intersection a pour coordonnées $(1\,;4)$.

Retour à l'exercice ◀◀

Corrigé de l'exercice 37.

• Figure 1 : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(120) = 12\cos(120) = -6$.

• Figure 2 : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 9\cos(30) = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

En effet, le triangle est isocèle donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 75°$ et $\widehat{BAC} = 180 - 2 \times 75 = 30°$.

• Figure 3 : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 4$ car B est le projeté orthogonal de C sur (AB).

Retour à l'exercice ◀◀

Corrigé de l'exercice 38.

1. (a) $\overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2 = AB^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

   d'où $64 = 49 + 9 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ puis $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}(64 - 49 - 9) = 3$.

   (b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos\widehat{BAD}$ d'où $3 = 7 \times 3 \times \cos\widehat{BAD}$ puis $\cos\widehat{BAD} = \dfrac{1}{7}$.

   $\left(\cos\widehat{BAD}\right)^2 + \left(\sin\widehat{BAD}\right)^2 = 1$ donc $\left(\sin\widehat{BAD}\right)^2 = 1 - \left(\dfrac{1}{7}\right)^2 = \dfrac{48}{49}$

   d'où $\sin\widehat{BAD} = \sqrt{\dfrac{48}{49}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$.

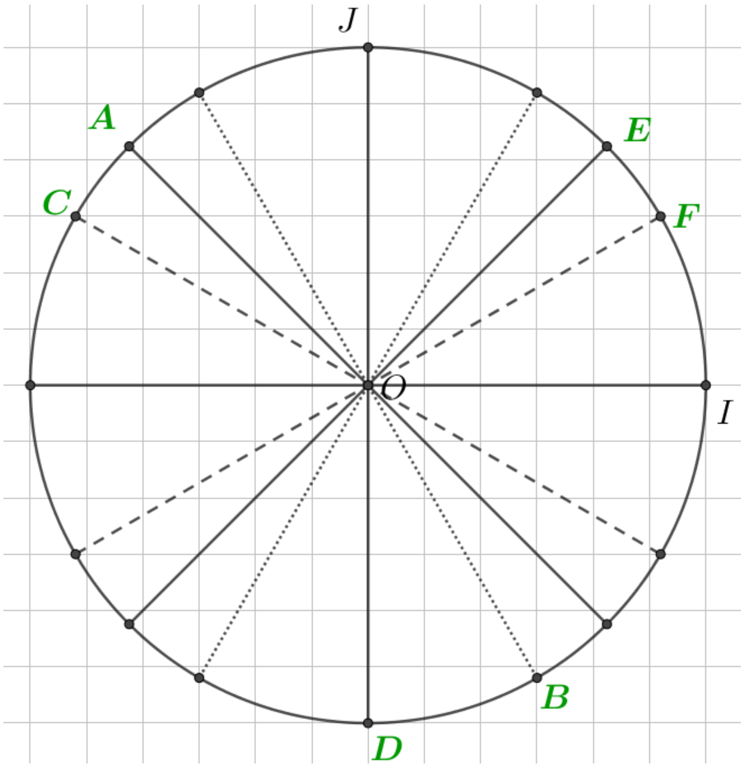
2. L'aire du triangle est donnée par $\dfrac{1}{2}AB \times AD \times \sin\widehat{BAD} = \dfrac{1}{2} \times 7 \times 3 \times \dfrac{4\sqrt{3}}{7} = 6\sqrt{3}$.

   L'aire du parallélogramme est alors $12\sqrt{3}$ unités d'aire.

Retour à l'exercice ◀◀

Corrigé de l'exercice 39.

1.



2.
- $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sin(-7\pi) = 0$
- $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
- $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Retour à l'exercice

Corrigé de l'exercice 40.

1. (a) $4X^2 + 2(\sqrt{2}-1)X - \sqrt{2} = 0$

   $\Delta = b^2 - 4ac = \left(2(\sqrt{2}-1)\right)^2 - 4 \times 4 \times \left(-\sqrt{2}\right) = 4\left(\sqrt{2}+1\right)^2$

   $X_1 = \dfrac{-2(\sqrt{2}-1) - 2\left(\sqrt{2}+1\right)}{2 \times 4} = \dfrac{-4\sqrt{2}}{8} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   $X_2 = \dfrac{-2(\sqrt{2}-1) + 2\left(\sqrt{2}+1\right)}{2 \times 4} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

   $S = \left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{1}{2}\right\}$

   (b) Dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$,

   $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{-\dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

   $\cos(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}\right\}$.

   $S_{]-\pi;\pi]} = \left\{-\dfrac{3\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}; \dfrac{3\pi}{4}\right\}$

2. (a) En reprenant les résultats de la question 1. c) on trouve $S = \left]-1; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$.

   (b) Dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$,
   $\cos(x) \leq -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \in \left]-\pi; -\dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4}; \pi\right]$.
   De même, $\cos(x) \geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}\right]$.
   D'où $S_{]-\pi;\pi]} = \left]-\pi; -\dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$.

Retour à l'exercice ◀◀

Corrigé de l'exercice 41.

1. Pour tout réel x, la fonction cosinus étant paire, on a :
   $f(-x) = (\cos(-x))^2 = (\cos(x))^2 = f(x)$. La fonction f est donc paire.
2. Pour tout réel x,
   $f(x+\pi) = (\cos(x+\pi))^2 = (-\cos(x))^2 = (\cos(x))^2 = f(x)$.
   La fonction f est π-périodique.
3. Pour tout réel x, $f(x) = \cos(x) \times \cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   $f(x) = (\cos(x))^2$, donc $f'(x) = -\sin(x) \times \cos(x) + \cos(x) \times (-\sin(x)) = -2\sin(x)\cos(x)$.
4. Pour $x \in \left[0\,; \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos(x) \geq 0$ et $\sin(x) \geq 0$.
   Donc $f'(x) = -2\sin(x)\cos(x) \leq 0$ sur cet intervalle.
   f est donc décroissante sur $\left[0\,; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
5. Oui cela suffit car grâce à la parité de f, on connait ses variations sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,; \dfrac{\pi}{2}\right]$ (elle est donc croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,; 0\right]$) et grâce à la périodicité de période π, on la connaît sur $\mathbb{R}$.

Retour à l'exercice ◀◀
